

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI****15.02.2025****Clasa a VI-a****Barem de corectare și notare****SUBIECTUL I (7puncte)**

- a) Aflați cel mai mic număr natural de forma  $\overline{abcd}$  știind că  $\frac{a}{a+5} = \frac{c}{c+5} = \frac{2}{d+2}$ .
- b) Aflați numerele naturale  $a, b$  și  $c$  invers proporționale cu numerele 21, 30 și 70 știind că  $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 2025$ .

**Soluție:**

- Oficiu ..... 1p
- a) Cifra  $a$  trebuie să fie nenulă și cât mai mică  
 $a = 1 \Rightarrow d = 10$  nu convine, 10 nu este o cifră ..... 1p  
 $a = 2 \Rightarrow c = 2$  și  $d = 5$ . Numărul căutat este 2025 ..... 1p
- b)  $a, b, c$  sunt invers proporționale cu 21, 30, 70  $\Leftrightarrow a \cdot 21 = b \cdot 30 = c \cdot 70 = k$  ..... 1p
- $$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 2025 \Leftrightarrow \frac{k^2}{3^2 \cdot 7^2} + 2 \cdot \frac{k^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + 3 \cdot \frac{k^2}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = 2025 \Leftrightarrow \frac{225k^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = 2025$$
- ..... 1p
- $k^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$  și  $k$  natural  $\Rightarrow k = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  ..... 1p
- Numerele căutate sunt  $a = 30, b = 21, c = 9$  ..... 1p

**SUBIECTUL II (7puncte)**

- a) Aflați care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr prim.
- b) Fie  $p$  un număr prim pentru care  $p^4 - 26$  este tot un număr prim. Demonstrați că, din orice mulțime cu cel puțin șase elemente numere naturale, putem alege două a căror diferență este divizibilă cu  $p$ .

*Gazeta Matematică***Soluție:**

- Oficiu ..... 1p
- a) Ultima cifră a unui număr prim poate fi 1, 2, 3, 5, 7, 9 ..... 1p  
 Ultima cifră a pătratului unui număr prim poate fi 1, 4, 5, 9 ..... 1p
- b)  $p = 2$  nu convine ..... 1p
- Dacă  $p = 5$ , atunci  $p^4 - 26 = 599$  și arată că 599 este prim ..... 1p
- Dacă ultima cifră a lui  $p$  este 1, 3, 7 sau 9, atunci ultima cifră a numărului  $p^4 - 26$  este 5 și deoarece  $p^4 - 26 > 5$ , numărul  $p^4 - 26$  nu poate fi prim ..... 1p
- Se aplică principiul cutiei pentru a demonstra că din orice mulțime cu cel puțin șase elemente numere naturale, putem alege două a căror diferență este divizibilă cu 5 ..... 1p

**SUBIECTUL III (7puncte)**

- a) Arătați că numerele  $7n + 8$  și  $8n + 9$  sunt prime între ele pentru orice număr natural  $n$ .
- b) Determinați numărul perechilor  $(a, b)$  de numere naturale pentru care există un număr natural  $n$  astfel încât  $\frac{a}{b} = \frac{7n+8}{8n+9}$  și  $11a + 13b \leq 1000$ .

*(etapa județeană 2024, enunț modificat)***Soluție:**

- Oficiu ..... 1p
- a) Fie  $d$  un divizor comun al numerelor  $7n + 8$  și  $8n + 9$ .  
 $d$  divide  $8 \cdot (7n + 8) - 7 \cdot (8n + 9)$  ..... 1p  
 $d = 1$  și prin urmare  $7n + 8$  și  $8n + 9$  sunt prime între ele ..... 1p
- b) Se deduce  $a = (7n + 8) \cdot k, b = (8n + 9) \cdot k$ , unde  $k$  este un număr natural nenul ..... 1p

- Înlocuind în  $11a + 13b \leq 1000$  se obține  $(181n + 205) \cdot k \leq 1000$ , de unde  $181n + 205 \leq 1000$  1p  
 $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  .....  
 $n = 0 \Rightarrow k \leq 4$ , deci sunt 4 perechi de numere 1p  
 $n = 1 \Rightarrow k \leq 2$ , deci sunt 2 perechi de numere .....  
 $n \in \{2, 3, 4\} \Rightarrow k = 1$ . 1p  
 În total sunt 9 perechi  $(a, b)$  care verifică cerințele din enunț .....

**Soluție alternativă:** Se află fracțiile  $\frac{a}{b}$  care verifică relațiile din ipoteză prin înlocuirea lui  $n$

cu valorile 0, 1, 2, 3, 4 și se arată că pentru  $n \geq 5$  avem  $a \geq 43$ ,  $b \geq 49$  și  $11a + 13b \geq 1110$ .

$$\frac{a}{b} \in \left\{ \frac{8}{9}, \frac{16}{18}, \frac{24}{27}, \frac{32}{36}, \frac{15}{17}, \frac{30}{34}, \frac{22}{25}, \frac{29}{33}, \frac{36}{41} \right\}.$$

#### **SUBIECTUL IV (7puncte)**

Fie semidreptele opuse OM și ON astfel încât OM este bisectoarea unghiului  $\angle AOB$ , ON este bisectoarea unghiului  $\angle COD$  și măsura unghiului  $\angle AOB$  este mai mare decât măsura unghiului  $\angle COD$ .

- a) Demonstrați că unghiurile  $\angle AOC$  și  $\angle BOD$  sunt congruente.  
 b) Dacă  $\angle AOC = 165^\circ$ , iar  $\angle AOB$  și  $\angle COD$  sunt complementare, aflați măsura unghiului  $\angle AOB$ .

**Soluție:**

- Oficiu ..... 1p  
 a) Semidreapta OM este bisectoarea  $\angle AOB$ , deci  $\angle AOM = \angle MOB = a$   
 Semidreapta ON este bisectoarea  $\angle COD$ , deci  $\angle CON = \angle NOD = b$  ..... 1p  
**Cazul I:** A și C sunt de aceeași parte a dreptei MN  
 $\angle AOC = \angle BOD = 180^\circ - a - b$ , deci  $\angle AOC \equiv \angle BOD$  ..... 1p  
**Cazul II:** A și C sunt de o parte și de alta a dreptei MN  
 $\angle AOC = \angle BOD = 180^\circ - a + b$ , deci  $\angle AOC \equiv \angle BOD$  ..... 1p  
 b) Dacă  $\angle AOB$  și  $\angle COD$  sunt complementare, atunci  $a + b = 45^\circ$  ..... 1p  
 Cazul I nu este posibil, deci A și C sunt de o parte și de alta a dreptei MN  
 $\angle AOD = 135^\circ$ ,  $\angle COD = 30^\circ$  ..... 1p  
 $\angle AOB = 60^\circ$  ..... 1p